



TITLE:

通貨オプション市場におけるボラティリティリスクプレミアムの推定 (ファイナンスの数理解析とその応用)

AUTHOR(S):

佐々木, 洋

CITATION:

佐々木, 洋. 通貨オプション市場におけるボラティリティリスクプレミアムの推定 (ファイナンスの数理解析とその応用). 数理解析研究所講究録 2011, 1736: 74-89

ISSUE DATE:

2011-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170821>

RIGHT:

通貨オプション市場におけるボラティリティリスクプレミアムの推定^{*1}

一橋大学大学院・国際企業戦略研究科 博士後期課程 佐々木 洋 (Hiroshi Sasaki)

Graduate School of International Corporate Strategy

Hitotsubashi University

1 はじめに

金融オプションの価格評価を行う上で必要不可欠なファクターの一つである原資産のボラティリティを、確率的変動を含むランダムな過程として捉え、その仮定の下でオプション価格評価式や価格自体を求めるアプローチは広く一般化されつつある。そのボラティリティ過程の確率的変動により新たに生ずるリスクプレミアムのことを一般に、ボラティリティ・リスクプレミアムと言うが、近年の実証研究において、ボラティリティ・リスクプレミアムの推定に関する研究結果の報告は、数、内容、共に非常に厚みを増している。

ボラティリティ・リスクプレミアムの存在に関する実証研究を、一般的な確率ボラティリティモデルのフレームワークの中で行った先行例として代表的なものに、Bakshi and Kapadia[2003]、Low and Zhang[2005]、及び、Lin and Chen[2009] などがある。特に、Bakshi and Kapadia[2003]、及び、Lin and Chen[2009] の研究に関しては株価指数（及び、そのオプション）を対象にして、また、Low and Zhang[2005] に関しては為替レート（及び、そのオプション）を対象にして、分析を行っている。このような先行研究では、実証的に推定されるボラティリティ・リスクプレミアムの時間的変動を考慮しておらず、寧ろ、期間を通しての平均的な同リスクプレミアムの水準や、その存在に関する統計的有意性に対してのみ焦点が当たっている。一方で当論文では、為替レートを対象に同様の実証研究を行うことを目的としているが、特に同リスクプレミアムの推定に関しては、推定期間を時間的にアップデートしていくことでその時間的変動を追い、サブプライムショック時（2007 年 7 月-8 月）やリーマンショック時（2008 年 9 月-10 月）、或いはギリシャ危機時（2010 年 5 月）、などにおけるリスクプレミアムの時間的変遷を分析している。尚、Bollerslev, Gibson and Zhou[2010] では、S & P500 株価指数（及び、そのオプション）を対象に同様の分析を行っているようである。

更に当論文では、推定されたボラティリティ・リスクプレミアムが示唆する、通貨オプションポートフォリオの Delta-hedged Gain and Loss（通貨オプションをデルタヘッジすることにより生じるヘッジ誤差が齎す損益）に関する期待値表現式を具体的に求め、別途、実際のヒストリカル・シミュレーションによって得られた同 Gain and Loss の平均水準が、先の期待値表現式との間で整合性を有しているのか否かを比較分析している。ここでの分析では、特に原通貨価格プロセスの構造として Heston[1993] 型確率ボラティリティモデルを前提としているが、仮に上記の二つの値の間に一致性が存在しない場合には、その原因として主に以下の二つの要因が可能性として考えられる。一つ目は、確率ボラティリティ構造自体は妥当な選択であったとしても、原通貨価格プロセスを支配する分布構造（モデルパラメータ）と、実際の通貨オプション市場価格を正当化する分布構造（モデルパラメータ）との間に本質的な差異が生じていること（但し、ここで「本質的な」という意味は、リスク調整後ベース（リスクニュートラルベース）で比較を行った場合であるということの意味する）、二つ目は、そもそも確率ボラティリティ構造だけでは捉えきれないそれ以外のファクター（ジャンプ要因、需給要因、離散時間によるデルタヘッジオペレーション、など）が、オプション価格評価に影響を及ぼしているということ、である。

一つ目の可能性に関する先行研究としては、Jackwerth[2000]、Guo[2000]、Ait-Sahalia, Wang, and Yared[2001]、などがあり、共に、オプション市場における価格形成から推定されるインプライド分布（Implied Distribution）形状と、

^{*1} 本稿を作成するにあたり、一橋大学大学院国際企業戦略研究科の中川秀敏准教授には、分析内容、及び、その結果に関して有益なアドバイスを数多く頂いている。この場を借りて感謝の意を表したい。但し、本稿における誤りなどに関する責任は全て筆者本人に帰属することは言うまでもない。

原資産の実現リターンから推定される実現分布 (Realized Distribution) 形状との間に本質的な違いがあることを実証的に確認し、市場のオプション価格評価に対するミスプライシングの可能性をトレーディングシミュレーションの結果により示している。二つ目の可能性に関する先行研究としては、Bates[1996]、Bakshi, Cao, and Chen[1998]、Pan[2002]、Branger and Schlag[2008]、Broadie, Chernov, and Johannes[2007]、Broadie, Chernov, and Johannes[2009]、などがあり、共に、実際のオプション市場価格を評価する上では、ジャンプリスク、及び、そのリスクプレミアムの存在を考慮することが非常に重要であることを伝えている。また、先に紹介した Ait-Sahalia, Wang, and Yared[2001] においても、ジャンプリスクを考慮することにより、インプライド分布と実現分布との間の本質的な違いは解消され得ることを示唆しており、同様に、オプション価格評価におけるジャンプリスクの考慮の重要性を説いている。それ以外にも、例えば Bollen, N. and Whaley, R.[2004] では、S & P500 Index オプション市場を前提に、その需給構造とインプライドボラティリティサーフェースの動向との間の関連性を検証、機関投資家のポートフォリオインシュアランスを目的としたプットオプションの買い圧力がボラティリティスキューに強く影響していることを示すと同時に、割高な (OTM) プットオプションの売却とデルタヘッジ戦略との組合せにより、有意にプラスの収益が統計上、与えられることを実証的に確認している。また、Gârleanu, Pedersen and Poteshman[2009] では、S & P500 Index オプション市場における需給圧力 (Demand Pressure) を価格決定モデルの中に取り込むことで、オプション価格の割高水準を需給構造の歪みから説明する試みを行っている。どちらも、オプション価格形成において、需給の要因も無視出来ない要因であることを示す重要な結果であろう。

当論文では、先に述べた二つの要因の内、特に一点目 (オプション市場におけるインプライド分布と、その後の実現分布との間における本質的な違い) に焦点を当て、2003 年 10 月以降の米ドル-円レートを対象として実証研究を行っている。ボラティリティ変動リスクが齎すリスクの市場価格自体が時系列的に変動していく過程において、デルタヘッジされた通貨オプションポートフォリオが齎す損益 (Delta-hedged Gain and Loss) はどの程度、同市場価格の水準だけで説明がつくのかを検証していくことにより、通貨オプションの市場価格自体に関するミスプライシングの可能性や、同 (通貨オプションの) 市場価格を説明する上で重要なリスクファクターの候補に関して推察していくことを目的としている。

以下、当論文は次のような構成になっている。第二章では具体的なモデル構造を指定し、デルタヘッジされた通貨オプションポートフォリオが齎す損益 (Delta-hedged Gain and Loss) は、そのフレームワークの中で客観的にどのように表現されるのかを明らかにすると同時に、同 DHGL の表現式の中でキーファクターとなるボラティリティ・リスクプレミアムの具体的な推定方法に関して簡単に述べる。第三章において、実証分析の中で利用するデータと実証分析方法の詳細を述べた後、第四章では得られた実証分析の具体的な結果に関して詳細に吟味する。第五章ではそれまでの纏めと今後の課題に関して簡単に述べる。

2 モデル設定と実証分析の方法

2.1 オプションポートフォリオにおける Delta-hedged Gain and Loss

基礎となるフィルター付き確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P; \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ とし、時間軸を $t \in [0, T]$ とする。ここで考える市場には、ある特定の為替レート S_t と、Non-tradable な状態変数 σ_t が存在しているものと想定する。 $W_t = (W_t^1, W_t^2)^t$ を二次元の標準ブラウン運動とし、為替レートと状態変数の実市場における変動過程は以下のような確率微分方程式に従うものとする。

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu_t dt + \sigma_t \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^1 + \sigma_t \rho dW_t^2 \\ d\sigma_t &= \theta_t dt + \eta_t dW_t^2 \end{aligned} \quad (1)$$

但し、 μ_t 、 θ_t 、 η_t は各々、 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ に関する適合過程 (Adapted stochastic process) とし、特に θ_t 、及び、 η_t は為替レート過程 S_t と独立であるものとする。また ρ は、 $-1 \leq \rho \leq 1$ を満たす実定数とする。

一方で、為替レート S_t を原通貨とする通貨オプション市場において、取引参加者がオプション価格評価を行う際に前提としている為替レートと状態変数の変動過程とは、一体どのようなものであろうか？ Jackwerth[2000]、Guo[2000]、Ait-Sahalia, Wang, and Yared[2001]、などでも指摘されている通り、オプション価格から示唆される原資産（原通貨）に関するリスク中立的な（将来）確率分布と、原資産（原通貨）の価格変動自体から示唆されるリスク中立的な（将来）確率分布との間には、本質的な違いが存在する可能性もある中で、当論文では、必ずしもオプション取引参加者が上記 (1) 式における各パラメータを正しく認識していない状況も予め考慮した上で、以下の分析を進めることとする。即ち、各 t 時点においてオプション取引参加者が保有する情報の集合を \mathcal{G}_t （但し、 $\mathcal{G}_t \subset \Omega$ は各 t に関して σ 加法族、且つ、 $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_{t_1} \subset \mathcal{G}_{t_2} \subset \dots, 0 \leq \forall t_1 \leq \forall t_2 \leq \dots$ とする）とし、必ずしも各 t 時点において、真の情報集合である \mathcal{F}_t と \mathcal{G}_t とが一致しないような状況も可能性として考慮した上で、オプション取引参加者は、(1) 式における各パラメータについて、

$$\mu_t \longrightarrow \tilde{\mu}_t \equiv E[\mu_t | \mathcal{G}_t] \quad , \quad \theta_t \longrightarrow \tilde{\theta}_t \equiv E[\theta_t | \mathcal{G}_t] \quad , \quad \eta_t \longrightarrow \tilde{\eta}_t \equiv E[\eta_t | \mathcal{G}_t] \quad , \quad \rho \longrightarrow \tilde{\rho} \quad (2)$$

という認識の下、各オプションの価格評価を行っているものとする。但しここで、 μ_t 、 θ_t 、 η_t 、は必ずしも $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$ に対して適合しているとは限らない、より一般的な状況下で議論を進めていく。（即ち、 $\mu_t \neq \tilde{\mu}_t$ 、 $\theta_t \neq \tilde{\theta}_t$ 、 $\eta_t \neq \tilde{\eta}_t$ 、 $\rho \neq \tilde{\rho}$ 、などの関係も可能性として考慮した上で、議論を進める。）

さて、ここで満期を T 、行使価格を $K(>0)$ とする、ヨーロピアンタイプのコールオプション^{*2}に関する時点 t でのプレミアムを $C(t, T; K)$ で表現しよう。但し、特に混乱を生じない状況下においては、より簡単に $C_t \equiv C(t, T; K)$ と表現することにする。 $0 \leq \tau \leq T - t$ とした場合、伊藤の補題により、

$$C_{t+\tau} = C_t + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial S_u} dS_u + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} d\sigma_u + \int_t^{t+\tau} b_u du$$

但し、

$$b_u = \frac{\partial C_u}{\partial u} + \frac{1}{2} \sigma_u^2 S_u^2 \frac{\partial^2 C_u}{\partial S_u^2} + \frac{1}{2} \eta_u^2 \frac{\partial^2 C_u}{\partial \sigma_u^2} + \rho \eta_u \sigma_u S_u \frac{\partial^2 C_u}{\partial S_u \partial \sigma_u}$$

また一方で、実際の市場で取引されているオプション価格が一般的に満たすべき偏微分方程式 (Pricing Equation) は以下の形で表現される。

$$\frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \tilde{\eta}_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial \sigma_t^2} + \tilde{\rho} \tilde{\eta}_t \sigma_t S_t \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t \partial \sigma_t} + (r_d - r_f) S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + (\tilde{\theta}_t - \lambda_t[\sigma]) \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} + \frac{\partial C_t}{\partial t} - r_d C_t = 0 \quad (4)$$

但し、 r_d 、及び r_f （共に実定数）は、各々が国内、及び外国の安全資産利子率（リスクフリーレート）を表しており、また、 $\lambda_t[\sigma]$ は、 dW_t^2 に起因されたボラティリティ・リスクプレミアムを表している。

(4) 式から得られる以下の関係式、

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} - \frac{1}{2} \tilde{\eta}_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial \sigma_t^2} - \tilde{\rho} \tilde{\eta}_t \sigma_t S_t \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t \partial \sigma_t} - (r_d - r_f) S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} - (\tilde{\theta}_t - \lambda_t[\sigma]) \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} + r_d C_t$$

を (3) 式における b_u 内に代入することにより、通貨オプション価格の確率過程に関する以下の表現式を得ることが出来る。

$$\begin{aligned} C_{t+\tau} = C_t &+ \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial S_u} dS_u + \int_t^{t+\tau} \left(r_d C_u - (r_d - r_f) S_u \frac{\partial C_u}{\partial S_u} \right) du \\ &+ \int_t^{t+\tau} \left[\frac{1}{2} (\eta_u^2 - \tilde{\eta}_u^2) \frac{\partial^2 C_u}{\partial \sigma_u^2} + (\rho \eta_u - \tilde{\rho} \tilde{\eta}_u) \sigma_u S_u \frac{\partial^2 C_u}{\partial S_u \partial \sigma_u} + (\theta_u - \tilde{\theta}_u) \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} \right] du \\ &+ \int_t^{t+\tau} \lambda_u[\sigma] \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} du + \int_t^{t+\tau} \eta_u \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} dW_u^2 \end{aligned} \quad (5)$$

^{*2} 但し、以下の議論は必ずしもコールオプションに限定されることなく、プットオプションやストラドルオプションなどに対しても共通して展開可能な議論である。

時刻 t から $t+\tau$ までの間において、通貨オプション（ここではヨーロッパ・コールオプション） C_t のロングポジションと、そのポジションに対するデルタニュートラル・ヘッジポジションとの合算ポートフォリオにより生じる損益額 $\Pi_{t,t+\tau}$ (=Delta-hedged Gain and Loss、以下「DHGL」で表記) は、一般的に、

$$\Pi_{t,t+\tau} = C_{t+\tau} - C_t - \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u}{\partial S_u} dS_u - \int_t^{t+\tau} \left(r_d C_u - (r_d - r_f) S_u \frac{\partial C_u}{\partial S_u} \right) du \quad (6)$$

と表現されることから、結局、(5) 式により、(6) 式は、

$$\begin{aligned} \Pi_{t,t+\tau} = & \int_t^{t+\tau} \left[\frac{1}{2} (\eta_u^2 - \tilde{\eta}_u^2) \frac{\partial^2 C_u}{\partial \sigma_u^2} + (\rho \eta_u - \tilde{\rho} \tilde{\eta}_u) \sigma_u S_u \frac{\partial^2 C_u}{\partial S_u \partial \sigma_u} + (\theta_u - \tilde{\theta}_u) \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} \right] du \\ & + \int_t^{t+\tau} \lambda_u [\sigma] \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} du + \int_t^{t+\tau} \eta_u \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} dW_u^2 \end{aligned} \quad (7)$$

と表現し直すことが出来る。よって、更に (7) 式の両辺に関して主観確率測度 (Physical Measure) P の下で期待値をとることにより、デルタニュートラル・ヘッジされた通貨オプションポートフォリオの期待 DHGL は、以下のように表現されることが分かる。

$$\begin{aligned} E^P [\Pi_{t,t+\tau}] = & \int_t^{t+\tau} E^P \left[\frac{1}{2} (\eta_u^2 - \tilde{\eta}_u^2) \frac{\partial^2 C_u}{\partial \sigma_u^2} + (\rho \eta_u - \tilde{\rho} \tilde{\eta}_u) \sigma_u S_u \frac{\partial^2 C_u}{\partial S_u \partial \sigma_u} + (\theta_u - \tilde{\theta}_u) \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} \right] du \\ & + \int_t^{t+\tau} E^P \left[\lambda_u [\sigma] \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} \right] du \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式の解釈は以下のように与えることが出来る。仮に通貨オプション市場における取引参加者が想定している原通貨の価格変動過程 ((2) 式) が、本来の原通貨価格変動過程 ((1) 式) と完全に一致する場合 (即ち、 $\mu_t = \tilde{\mu}_t$ 、 $\theta_t = \tilde{\theta}_t$ 、 $\eta_t = \tilde{\eta}_t$ 、 $\rho = \tilde{\rho}$ 、などが成立する場合) には、(8) 式の右辺第一項はゼロとなり、DHGL に関する主観確率測度 P の下での期待値は、

$$E^P [\Pi_{t,t+\tau}] = \int_t^{t+\tau} E^P \left[\lambda_u [\sigma] \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} \right] du \quad (9)$$

として与えられるため、期待 DHGL はボラティリティ・リスクプレミアムの水準 $\lambda_t[\sigma]$ のみによって完全に決定されることになる。また、Heston[1993] 型確率ボラティリティモデルのように線形なボラティリティ・リスクプレミアム $\lambda_t[\sigma] \equiv \lambda \sigma_t$ (但し、 λ は実定数) を更に仮定した場合には、一般的に $\sigma_t > 0$ 、及び、 $\frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} > 0$ であるため、期待 DHGL の水準に関する正負の符号は、定数 λ の正負に関する符号と完全に一致する。しかし、その一方で、仮に通貨オプション市場における取引参加者が想定している原通貨の価格変動過程 ((2) 式) が、本来の原通貨価格変動過程 ((1) 式) と異なる場合 (特に、 $\theta_t \neq \tilde{\theta}_t$ 、 $\eta_t \neq \tilde{\eta}_t$ 、 $\rho \neq \tilde{\rho}$ 、のうち、少なくともどれかが成立する場合) には、期待 DHGL に関する主観確率測度 P の下での期待値に対して、ボラティリティ・リスクプレミアム $\lambda_t[\sigma]$ 以外の要因、即ち、(8) 式の右辺第一項で表される、モデルの Mis-specification による要因が影響することになり、必ずしもボラティリティ・リスクプレミアムのみで期待 DHGL の水準が決定される訳ではないことが分かる。

さて、以下では (1) 式、及び、(2) 式の構造として、特に、 $\theta_t \equiv -k\sigma_t$ 、 $\eta_t \equiv v$ 、 $\tilde{\theta}_t \equiv -\tilde{k}\sigma_t$ 、 $\tilde{\eta}_t \equiv \tilde{v}$ (但し、 k 、 v 、 \tilde{k} 、 \tilde{v} は全て実定数)、の場合、即ち、Heston[1993] 型の確率ボラティリティモデルを想定し、これまでの議論をもう少し深く検討してみよう。同モデルでは先にも述べたように、ボラティリティ・リスクプレミアムに関して $\lambda_u[\sigma] \equiv \lambda \sigma_t$ (但し、 λ は実定数) の構造、即ち、ボラティリティに対する線形構造を仮定していることは一般的に良く知られている。更にここでは、 $\mu_t = \tilde{\mu}_t = r_d - r_f$ 、 $k = \tilde{k}$ 、及び、 $v = \tilde{v}$ 、を追加で仮定^{*3}し、モデルの Mis-specification に関する可能性

^{*3} 1つ目の仮定 ($\mu_t = \tilde{\mu}_t = r_d - r_f$) に関しては、為替市場における UIP (Uncovered Interest Parity) の成立を主張している。この点に関しては様々な実証研究が存在しており、短期的な UIP の不成立を示唆する実証研究も幾つか存在するが、当論文では、その点に関してはあまり深く立ち入らないことにする。また、2つ目の仮定 ($k = \tilde{k}$) に関しては、例えば (1) 式の構造下においては、 $\sigma_t \sim N\left(\sigma_0 e^{(-kt)}, \frac{v^2}{2k}(1 - e^{(-2kt)})\right)$ となることを勘案すると、(1) 式、及び、(2) 式における σ_t の期待値が、各々確率測度 P の下で (各時点 t において) 一致することを主張するものである。オプション市場におけるインプライドボラティリティと、その後の実現ボラティリティとの間における一貫性に関しても数多くの先行研究が存在しており、例えば Jiang and Tian[2005] では、彼等のモデルフリー・インプライドボラティリティがその後の実現ボラティリティに対して、より効率的な予測を齎すと主張している。

は、 $\rho(\bar{\rho})$ のみに依拠しているものと限定する。Das and Sundaram[1997] によれば、今回、前提としている Heston[1993] 型確率ボラティリティ構造を所与とした場合の資産価格（或いは、為替レート）分布に関する条件付歪度（Conditional Skewness）、及び、条件付尖度（Conditional Kurtosis）は、共に、パラメータ v, ρ の双方に依存することになる。特にパラメータ ρ 自身、上記二つのモーメントに直接的に影響を及ぼすパラメータである一方、モデルの Mis-specification に関する影響が、パラメータ v に拠るものか、或いは、パラメータ ρ に拠るものかまで詳細に判断するのは極めて難しいため、今回は、特に三つ目の仮定： $v = \bar{v}$ 、まで付け加えた上で、モデルの Mis-specification に関する可能性は $\rho(\bar{\rho})$ のみに限定させて実証分析を行った。期待 DHGL に対するモデルの Mis-specification に関する影響が、どの程度パラメータ v に依存し、また、どの程度パラメータ ρ に依存するのかを詳細に分析していくことは、大きな課題の一つとなるものと思われるが、その件に関しては、ここでは深く立ち入らないことにする。

以下、上記前提下において、特に（1）式の下で導かれる通貨オプション価格の理論値を $C_t^{H,T}(\lambda)$ として表し、また、（2）式の下で導かれる通貨オプション価格の理論値（＝実際の市場価格、今までの議論における C_t ）を、改めて $C_t^{H,M}(\lambda)$ として表現することにしよう。

$C_t^{H,T}$ に関しても（3）式同様、伊藤の補題により、

$$C_{t+\tau}^{H,T}(\lambda) = C_t^{H,T}(\lambda) + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial S_u} dS_u + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} d\sigma_u + \int_t^{t+\tau} b_u du$$

但し、

$$b_u = \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial u} + \frac{1}{2} \sigma_u^2 S_u^2 \frac{\partial^2 C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial S_u^2} + \frac{1}{2} \eta_u^2 \frac{\partial^2 C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u^2} + \rho \eta_u \sigma_u S_u \frac{\partial^2 C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial S_u \partial \sigma_u}$$
(10)

が成立し、また、（4）式同様、以下の偏微分方程式 (Pricing Equation) を満たす。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t^{H,T}(\lambda)}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \eta_u^2 \frac{\partial^2 C_t^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_t^2} + \rho \eta_t \sigma_t S_t \frac{\partial^2 C_t^{H,T}(\lambda)}{\partial S_t \partial \sigma_t} + (r_d - r_f) S_t \frac{\partial C_t^{H,T}(\lambda)}{\partial S_t} \\ + (\theta_t - \lambda_t[\sigma]) \frac{\partial C_t^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_t} + \frac{\partial C_t^{H,T}(\lambda)}{\partial t} - r_d C_t^{H,T}(\lambda) = 0 \end{aligned}$$
(11)

（10）式、及び、（11）式を前提に、（5）式を導いたプロセスと同様のプロセスをとることで、原通貨市場における価格プロセス構造を前提としたオプションの理論価格 $C_t^{H,T}$ に関する以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} C_{t+\tau}^{H,T}(\lambda) = C_t^{H,T}(\lambda) + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial S_u} dS_u + \int_t^{t+\tau} \left(r_d C_u^{H,T}(\lambda) - (r_d - r_f) S_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial S_u} \right) du \\ + \int_t^{t+\tau} \lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} du + \int_t^{t+\tau} v \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} dW_u^2 \end{aligned}$$
(12)

ここで仮に $\tau \equiv T - t$ とした場合には、 $C_T^{H,T}(\lambda) = C_T^{H,T}(0)$ であるから、この関係を利用すると、（12）式により以下の関係式を得ることが出来る。

$$\begin{aligned} C_t^{H,T}(\lambda) + \int_t^T \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial S_u} dS_u + \int_t^T \left(r_d C_u^{H,T}(\lambda) - (r_d - r_f) S_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial S_u} \right) du \\ + \int_t^T \lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} du + \int_t^T v \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} dW_u^2 \\ = C_t^{H,T}(0) + \int_t^T \frac{\partial C_u^{H,T}(0)}{\partial S_u} dS_u + \int_t^T \left(r_d C_u^{H,T}(0) - (r_d - r_f) S_u \frac{\partial C_u^{H,T}(0)}{\partial S_u} \right) du \\ + \int_t^T v \frac{\partial C_u^{H,T}(0)}{\partial \sigma_u} dW_u^2 \end{aligned}$$

よって、

$$C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda) = \int_t^T E^P \left[\lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} \right] du + r_d \int_t^T E^P \left[C_u^{H,T}(\lambda) - C_u^{H,T}(0) \right] du$$
(13)

という関係式を得る。

命題 1

$$C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda) \leq (\geq) \int_t^T E^P \left[\lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} \right] du \leq (\geq) (1 + r_d(T-t)) (C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda)) \quad \text{for } \lambda \geq (\leq) 0$$

特に、 $r_d = 0$ の場合には、

$$C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda) = \int_t^T E^P \left[\lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} \right] du \quad (14)$$

と表現出来る。

証明 1 (1) $\lambda \geq 0$ とする。 $C_u^{H,T}(\lambda) - C_u^{H,T}(0) \leq 0$ ($\forall u \in [t, T]$)、及び、 $\frac{\partial}{\partial u} E^P [C_u^{H,T}(\lambda) - C_u^{H,T}(0)] = E^P \left[\frac{\partial}{\partial u} (C_u^{H,T}(\lambda) - C_u^{H,T}(0)) \right] \geq 0$ より、

$$\begin{aligned} C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda) &= \int_t^T E^P \left[\lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} \right] du + r_d \int_t^T E^P [C_u^{H,T}(\lambda) - C_u^{H,T}(0)] du \\ &\geq \int_t^T E^P \left[\lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} \right] du + r_d(T-t) (C_t^{H,T}(\lambda) - C_t^{H,T}(0)) \\ &\therefore (1 + r_d(T-t)) (C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda)) \geq \int_t^T E^P \left[\lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} \right] du \end{aligned}$$

一方で、 $E^P [C_u^{H,T}(\lambda) - C_u^{H,T}(0)] \leq 0$ より、

$$C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda) \leq \int_t^T E^P \left[\lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} \right] du$$

は自明。よって上記二つの不等式から、

$$C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda) \leq \int_t^T E^P \left[\lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} \right] du \leq (1 + r_d(T-t)) (C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda))$$

(2) $\lambda < 0$ の時に関しても、 $C_u^{H,T}(\lambda) - C_u^{H,T}(0) \geq 0$ ($\forall u \in [t, T]$)、及び、 $\frac{\partial}{\partial u} E^P [C_u^{H,T}(\lambda) - C_u^{H,T}(0)] = E^P \left[\frac{\partial}{\partial u} (C_u^{H,T}(\lambda) - C_u^{H,T}(0)) \right] \leq 0$ であることを踏まえ、上記 (1) の場合と同様にして考えれば、命題の主張を得ることが出来る。(証明終)

特に 2000 年以降における日本のゼロ金利政策下においては、概ね $r_d \approx 0$ と見なすことが出来るため、この後の実証分析のように、少なくともクロス円レートを対象にする限りにおいては、近似的に (14) 式が成立していると言える。

Stein[1989] や Bakshi and Kapadia[2003] などでも指摘されている通り、残存期間が短期^{*4}の Near-the Money (NTM) コールオプション価格は、概ねボラティリティに対して線形の関係を持つことが知られており、特に Bakshi and Kapadia[2003] でも触れている通り、その場合には、 σ_t と $\frac{\partial C_t^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_t}$ (乃至は、 σ_t と $\frac{\partial C_t^{H,M}(\lambda)}{\partial \sigma_t}$) との間に独立性を仮定することが出来る。この時、Bakshi and Kapadia[2003] によると、以下の命題が成立する。

命題 2 (Bakshi and Kapadia(2003)) コールオプションのベガ (*Vega*) $\partial C_t / \partial \sigma_t$ が S_t に対して線形で、且つ、 σ_t と独立となっている場合、即ち、 $\partial C_t / \partial \sigma_t = \beta(\tau; y) S_t$ (β は実数値関数、 τ はオプション残存期間、 y はオプション・マネーネス (*Moneyiness*)) と表現可能な場合には、NTM オプションの期待 *DHGL* に関して以下の関係式が成立する。

$$E_t^P [\Pi_{t,t+\tau}] = \lambda \varphi_t(\tau) S_t \sigma_t$$

但し、 $\varphi_t(\tau) > 0$ は以下のように表現される実数値関数である。

$$\begin{aligned} \varphi_t(\tau) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{1+n}}{(1+n)!} \varphi_n \\ \varphi_1(\tau) &\equiv -\frac{\partial \beta}{\partial \tau} + \beta \mu - \beta k + \beta v \end{aligned} \quad (15)$$

以下、 $\varphi_n (n = 2, 3, \dots)$ に関しても、 β, τ, μ, k, v の関数

^{*4} 実際、この後の実証分析においては、期間 1 ヶ月間の通貨オプションのみを対象にシミュレーションを行っており、長期オプションに関しては分析対象としていない。

証明 2 Bakshi and Kapadia[2003] の Proposition2 を参照。

上記命題を前提とした場合には、(14) 式、及び、先述の仮定： $\mu_t = \bar{\mu}_t$ 、 $k = \bar{k}$ 、 $v = \bar{v}$ 、により、

$$\begin{aligned}
 C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda) &\approx \int_t^T E^P \left[\lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,T}(\lambda)}{\partial \sigma_u} \right] du = \lambda \varphi_t^{H,T}(\tau) S_t \sigma_t \\
 &= \lambda \varphi_t^{H,M}(\tau) S_t \sigma_t = \int_t^T E^P \left[\lambda \sigma_u \frac{\partial C_u^{H,M}(\lambda)}{\partial \sigma_u} \right] du \\
 \varphi_t^{H,T}(\tau) &\equiv (1) \text{ 式の構造下における } \varphi_t(\tau) \\
 \varphi_t^{H,M}(\tau) &\equiv (2) \text{ 式の構造下における } \varphi_t(\tau)
 \end{aligned} \tag{16}$$

という近似関係が成立することになり、この (16) 式における近似関係を (8) 式に対して導入することによって、Heston[1993] 型確率ボラティリティモデルを前提とした場合における期待 DHGL の評価式は、

$$E^P[\Pi_{t,T}] \approx \int_t^T E^P \left[v(\rho - \bar{\rho}) \sigma_u S_u \frac{\partial^2 C_u^{H,M}}{\partial S_u \partial \sigma_u} \right] du + [C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda)] \tag{17}$$

と近似することが出来ることが分かる。

この (17) 式を前提に、当論文では以下の手順により、実際の DHGL をバックテストシミュレーションにより推定すると同時に、その水準を、「ボラティリティ・リスクプレミアムによる要因」と、「モデルの Mis-specification による要因」の二つに分解し、各々の期待 DHGL に対する影響度を時系列的に確認する。

手順 1 指定の通貨オプション市場価格に関する期待 $DHGL(E^P[\Pi_{t,T}])$ を、バックテストシミュレーションにより推定する。(バックテストに関する具体的方法は後述参照)

手順 2 (1) 式におけるパラメータ (k, v, ρ) を推定する。(推定方法に関しては後述参照)

手順 3 各時点におけるボラティリティリスクの市場価格 λ を推定する。(推定方法に関しては後述参照)

手順 4 期待 DHGL に対するボラティリティ・リスクプレミアムの影響度

$$C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda)$$

((17) 式の右辺第二項) を計算する。

手順 5 以上の結果に基づき、期待 DHGL に対するモデルの Mis-specification による影響度

$$\int_t^T E^P \left[v(\rho - \bar{\rho}) \sigma_u S_u \frac{\partial^2 C_u^{H,M}}{\partial S_u \partial \sigma_u} \right] du$$

((17) 式の右辺第一項) を計算する。

実証結果に入る前に、ボラティリティリスクの市場価格 λ を推定する方法を簡単に整理しておこう。

2.2 ボラティリティ・リスクプレミアムの推定

Heston[1993] 型確率ボラティリティモデルは先述の通り、例えば (2) 式において特に、 $\bar{\theta}_t \equiv -\bar{k}\sigma_t$ 、 $\bar{\eta}_t \equiv \bar{v}$ 、とした場合、即ち、

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_t}{S_t} &= (r_d - r_f)dt + \sigma_t \sqrt{1 - \bar{\rho}^2} dW_t^1 + \sigma_t \bar{\rho} dW_t^2 \\
 d\sigma_t &= -\bar{k}\sigma_t dt + \bar{v} dW_t^2
 \end{aligned} \tag{18}$$

に相当するが、特にボラティリティ・リスクプレミアムとして $\lambda_t[\sigma] \equiv \lambda\sigma_t$ (但し、 λ は実定数) の構造、即ち、ボラティリティに対する線形構造を仮定した場合には、(18) 式は、リスク中立確率測度 (その確率測度を以下、「 \tilde{P} 」で表す) の下では、

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= (r_d - r_f)dt + \sigma_t\sqrt{1 - \tilde{\rho}^2}d\tilde{W}_t^1 + \sigma_t\tilde{\rho}d\tilde{W}_t^2 \\ d\sigma_t &= -(\tilde{k} + \lambda)\sigma_t dt + \tilde{v}d\tilde{W}_t^2\end{aligned}\quad (19)$$

但し、 $\tilde{W}_t \equiv (\tilde{W}_t^1, \tilde{W}_t^2)^t$ は、 \tilde{P} の下における 2 次元ブラウン運動

と表現されることになる。この (19) 式から、

$$E_t^{\tilde{P}}[\sigma_u^2] = \sigma_t^2 \exp(-2(\tilde{k} + \lambda)(u - t)) + \frac{\tilde{v}^2}{2(\tilde{k} + \lambda)} (1 - \exp(-2(\tilde{k} + \lambda)(u - t)))$$

(但し、 $t \leq u$) が得られる。よって、時刻 t 時点から時刻 T 時点までの間の実現分散 (実現ボラティリティの 2 乗) $RV_{t,T}$ に関するリスク中立確率測度 \tilde{P} の下における期待値は、以下のように表現することが出来る。

$$\begin{aligned}E_t^{\tilde{P}}[RV_{t,T}] &= E_t^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du\right] = \frac{1}{T-t} \int_t^T E_t^{\tilde{P}}[\sigma_u^2] du \\ &= \frac{\tilde{v}^2}{2(\tilde{k} + \lambda)} + \frac{\exp(-2(\tilde{k} + \lambda)T) - \exp(-2(\tilde{k} + \lambda)t)}{2(\tilde{k} + \lambda)(T-t)} \left(\frac{\tilde{v}^2}{2(\tilde{k} + \lambda)} - \sigma_t^2\right)\end{aligned}\quad (20)$$

一方、Carr and Wu[2009] では、リスク中立確率測度の下における将来の実現分散に関する期待値の具体的な表現を、一般的なノンパラメトリックモデルのフレームワーク下^{*5}において以下のように導き出している。

命題 3 (Carr and Wu(2009)) 無裁定条件下において、時刻 t 時点から時刻 T 時点における実現分散の期待値は、時刻 t 時点において以下のように表現される。

$$E_t^{\tilde{P}}[RV_{t,T}] = \frac{2}{T-t} \int_0^\infty \frac{\Theta_t(K, T)}{B_t(T)K^2} dK \quad (21)$$

但し、 $B_t(T)$ は満期 T 時点において 1 通貨単位を支払う割引債の t 時点における価格を意味しており、また、 $\Theta_t(K, T)$ は、行使価格を K とする、満期 T の OTM (Out of the Money) ヨーロピアンオプションに関する t 時点の価格を表すものとする。(具体的には「 $K > ATM$ 原資産価格」の場合にはコールオプション価格を表し、また、「 $K \leq ATM$ 原資産価格」の場合にはプットオプション価格を表している)

証明 3 Carr and Wu[2009] の Proposition1 を参照。

(18) 式のモデルパラメータ (特に、 $\tilde{k}(=k)$, $\tilde{v}(=v)$)、及び、通貨オプション市場における実際のオプション取引価格 $\Theta_t(K, T)$ を得ることが出来れば、先述の (20) 式、及び、上の (21) 式から得られる以下の関係式、

$$\frac{2}{T-t} \int_0^\infty \frac{\Theta_t(K, T)}{B_t(T)K^2} dK = \frac{\tilde{v}^2}{2(\tilde{k} + \lambda)} + \frac{\exp(-2(\tilde{k} + \lambda)T) - \exp(-2(\tilde{k} + \lambda)t)}{2(\tilde{k} + \lambda)(T-t)} \left(\frac{\tilde{v}^2}{2(\tilde{k} + \lambda)} - \sigma_t^2\right) \quad (22)$$

を用いて、具体的に λ の値を推定することが出来る。よって、その推定値を用いれば、先述の $C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda)$ ((17) 式の右辺第二項) を、各 t 時点において具体的に計算することが出来るのである。

^{*5} 実際、Carr and Wu[2009] では、原資産価格過程に関して以下のような構造を仮定している。(記号の定義に関しては同論文を参照されたい。)

$$dF_t = F_t - \sigma_t - dW_t + \int_{(-\infty, \infty) \setminus 0} F_t - (e^x - 1) [\mu(dx, dt) - \nu_t(x) dx dt]$$

即ち、連続なマルチンゲール部分と、ジャンプを与えるマルチンゲール部分との組み合わせで原資産価格を表現しており、連続時間マルチンゲールに関する、より一般的な表現下において議論を進めている。以下で示す命題に関して同論文では、正確には、ジャンプ部分が $E_t^{\tilde{P}}[RV_{t,T}]$ に対して与える影響も項として追加した形で表記されているのであるが、この論文ではジャンプ過程は扱ってはならず、基本的に連続マルチンゲールのみを対象 ((18) 式、及び、(19) 式を参照) としているため、それに合わせた形で命題を再表現していることに留意されたい。

尚、(18) 式 (乃至は、(19) 式) に基づくヨーロッパタイプのコールオプション価格に関しては、その具体的な価格公式が Heston[1993] により知られており、下式で表現される。

$$\begin{aligned}
 C_t^{H,T}(\lambda) &= S_t P_1 + e^{-r\tau} K P_2 \\
 \text{where} \\
 P_j &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-\sqrt{-1}\phi \ln(K) F_j}}{\sqrt{-1}\phi} \right] d\phi \\
 F_j &= e^{C+DV_t+\sqrt{-1}\phi \ln(S_t)} \\
 C &= (r_d - r_f)\tau\phi\sqrt{-1} + \frac{1}{4} \left[(\beta_j - 2\rho v\phi\sqrt{-1} + h)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - ge^{h\tau}}{1 - g}\right) \right] \\
 D &= \frac{\beta_j - 2\rho v\phi\sqrt{-1} + h}{4v^2} \left(\frac{1 - e^{h\tau}}{1 - g} \right) \\
 g &= \frac{\beta_j - 2\rho v\phi\sqrt{-1} + h}{\beta_j - 2\rho v\phi\sqrt{-1} - h} \\
 h &= \sqrt{(2\rho v\phi\sqrt{-1} - \beta_j)^2 - 4v^2(2u_j\phi\sqrt{-1} - \phi^2)} \quad (j = 1, 2) \\
 \text{and} \\
 \tau &= T - t, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, \beta_1 = 2k + \lambda - 2\rho v, \beta_2 = 2k + \lambda
 \end{aligned} \tag{23}$$

ヨーロッパタイプのプットオプション価格に関しても、(23) 式、及び、プットコールパリティにより、同様に解析解を求めることが出来る。

3 利用データと実証分析の詳細

3.1 利用データ

今回は、米ドル/円レート、及び、同レートを原通貨とする残存期間 1 ヶ月間の通貨オプションのみを分析対象とし、特に為替レート系列に関しては、WM/Reuter Closing Spot Rate の日次データを用いて全てのシミュレーションを行っている。また、国内、及び、米国金利に関しては LIBOR1 ヶ月金利を利用した。ヨーロッパタイプの OTC 通貨オプションに関する期間 1 ヶ月間のインプライドボラティリティは、ブルームバーク (Bloomberg) より取得可能なデータを利用し、行使価格に関しては、5-Delta-Put、10-Delta-Put、15-Delta-Put、25-Delta-Put、35-Delta-Put、ATM、35-Delta-Call、25-Delta-Call、15-Delta-Call、10-Delta-Call、5-Delta-Call、の全 11 種類を用いている。また、この後、期待 DHGL の推定を行う上で、ヨーロッパオプションの売却ポジションに対するデルタニュートラルヘッジ戦略から得られる損益をシミュレーションしているが、そのシミュレーションにおけるオプション売却時には、各行使価格に対応するオプションの Bid 価格を用いてシミュレーションを行っている。尚、今回の分析期間は、同インプライドボラティリティデータがハンドリング可能な 2003 年 10 月以降、2010 年 6 月末までとした。

3.2 Heston[1993] モデルのパラメータ推定

当論文では、(18) 式で表現される Heston モデルに関するパラメータ推定を、Ait-Sahalia[2001]、Ait-Sahalia and Kimmel[2007]、などで提唱された最尤推定法に基づいて行っている。同手法は、推移確率関数のエルミート級数展開近似を用いることで尤度関数の近似式を与え、離散時間間隔でしか観測されない情報をベースに、最尤法により多変量拡散過程に対してパラメータを推定する方法論を与えている。より具体的には、原資産とその瞬間ボラティリティ、或いは、原資産とそのオプション価格に関する結合過程を観測対象とした場合における 2 変量拡散過程に対して、パラメータ推定のための具体的な尤度関数を解析的に導出している。今回の分析では、瞬間ボラティリティの代替として、過去 20 営業日の実現日次ボラティリティを用いており、原通貨と同ボラティリティとの結合過程に関して、モデルパラメータを当

最尤法により推定した。また、今回の実証分析では、過去 1750 営業日（過去約 7 年間）^{*6}の日次データを用いて Rolling Window により、モデルパラメータをアップデートしていく方法を採用した。

尚、最尤法による具体的な推定手法が提唱されるまでは、連続時間型確率ボラティリティモデルに関するパラメータ推定方法は主に、擬似最尤法（Quasi-Maximum Likelihood Estimation）や MCMC（Markov-chain Monte Carlo）法などに限定されていた。しかし昨今、Ait-Sahalia and Kimmel[2007]に代表されるような最尤法を用いることが可能になったことで、連続時間型確率ボラティリティモデルに関するパラメータ推定アプローチのバリエーションが更に広がったのと同時に、その利便性が一層向上している。具体的な手法の詳細に関しては同論文を参照されたい。

3.3 ボラティリティ・リスクプレミアムの推定

先に得られた (22) 式からボラティリティリスクの市場価格 λ を推定するのであるが、そのためには、(21) 式における積分項を計算する必要がある。即ち、任意の行使価格 K に対して OTM オプション価格 $\Theta_t(K, T)$ を計算する必要があるが生じるのであるが、実際に得られるインプライドボラティリティに関しては先程述べた通り、行使価格 11 種類であるため、何らかの方法により、その行使価格の間を補間する必要がある。離散的な行使価格に関するインプライドボラティリティの補間に関しては、Brunner and Hafner[2003]による多項式近似手法^{*7}に従い実施した。また、(21) 式における $B_t(T)$ に関しては、 $\exp(-r(T-t))$ （但し、金利 r に関しては LIBOR1M の円金利）によって計算している。尚、実際の積分計算に関しては、積分区間を離散化することにより数値計算を行った。

3.4 期待 DHGL の推定

各時点において通貨オプション（ATM フォワード・ストラドル、又は、OTM 25-Delta-プット）^{*8}の売却ポジションと、そのポジションに対するデルタニュートラルヘッジを組み合わせることで運用することにより、（オプション残存期間である）1 ヶ月後にどの程度の損益（DHGL）が残るのかをヒストリカルシミュレーションにより検証した。最も最初の運用開始時点を 2003 年 10 月 31 日とし、1 ヶ月間のシミュレーションを行った後、1 営業日ずらして逐次、同様のシミュレーションを実施した。最後のシミュレーションは、2010 年 5 月 31 日開始、同年 6 月末に終了を迎える運用であり、全部で 1,717 サンプルの DHGL が得られた。尚、デルタニュートラルヘッジを行う際のヘッジ比率算出に関しては、本来、前提としているモデル構造から示唆されるヘッジ比率を用いるべきではあるが、簡便性を考慮して、ここでは Garman-Kohlhagen[1983]モデル（通貨オプションを対象とした Black-Scholes 型モデル）から示唆されるヘッジ比率を用いる。例えば Bakshi and Kapadia[2003]、Low and Zhang[2005]などでは、シミュレーションを用いた数値実験により、Black-Scholes 型モデルによるデルタニュートラルヘッジ戦略と、Heston[1993]モデルのような確率ボラティリティモデルによる同戦略との間で生じる平均ヘッジ損益（期待 DHGL）のバイアスは非常に微小であり、ボラティリティ・リスクプレミアムの存在に関わる実証分析によって得られる結果に大きな影響を与えるものではないとしている。当論文においても、このような先行研究の立場に則って、デルタニュートラルヘッジ戦略におけるヘッジ比率は Garman-Kohlhagen[1983]モデルをベースに算出することにした。

今回のデルタニュートラルヘッジシミュレーションでは、上記式中におけるボラティリティ σ は過去 20 営業日における実現日次ボラティリティを用い、デルタニュートラルヘッジオペレーションのデルタ調整タイミングは日次とした。

^{*6} パラメータ推定値の安定性を確保する為に必要と思われるサンプル数のチューニングを行った結果。

^{*7} 時刻 t 時点において、満期 T 、行使価格 K のオプションに関するインプライドボラティリティ $\sigma_t^T(K)$ を、次のような多項式により表現する。
 $\sigma_t^T(K) = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 M^2 + D\beta_3 M^3$ 、但し、 $D \equiv 0$ (if $M \leq 0$)、 $\equiv 1$ (if $M > 0$)、また、 $M \equiv \log\left(\frac{K}{F_t^T}\right)/\sqrt{T-t}$ であり、 F_t^T は、 t 時点における満期 T のフォワードレートを意味している。

^{*8} 「ATM フォワード・ストラドル」のロング戦略とは、オプション満期と同一の満期を持つフォワードレートを行使価格として、同行使価格のプットオプションとコールオプションを買い持ちする戦略（同ショート戦略の時は、売り建てする戦略）のことを意味する。

DHGL は具体的には以下のようにして計算される。

$$\Pi_{t,T} = C_T^{H,M} - C_t^{H,M} - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t_n (S_{t_n} - S_{t_{n+1}}) - \sum_{n=0}^{N-1} (r_d C_t^{H,M} - (r_d - r_f) \Delta t_n S_{t_n}) \frac{T-t}{N}$$

尚、今回のシミュレーションでは、デルタ調整のための通貨スポット取引に関する取引コストは考慮していない。^{*9}（取引コストは通貨オプション取引に対してのみ考慮。）

4 実証分析の結果

4.1 Market Price of Volatility Risk の推定結果

Fig.1 では、(22) 式から推定されたボラティリティリスクの市場価格 λ に関する時系列推移を示している。この期間、 λ は時期を通して概ねマイナス値であり、平均的にはマイナスのボラティリティ・リスクプレミアムとなっていることに関しては、Low and Zhang[2005] などの先行研究と一致する結果である。但し、このリスクプレミアムは時期を通して一定ではなく、特に 2007 年夏頃のサブプライムショック時を境に、大きくその水準がマイナス方向へ変化しており、2008 年 9 月から 10 月に掛けてのリーマンショック時において、その絶対水準はピークに達している。その後、徐々に絶対水準は低下してきているものの、2010 年 5 月のギリシャ危機の時点で再び、大きくマイナス方向へ動いてるようである。

更に、このボラティリティ・リスクプレミアムの水準に関する統計的有意性に関しても確認しておこう。Table1 は、先に得られたボラティリティリスクに関する市場価格 λ の統計量を簡単に要約したものである。Table1 の最上段は、今回の分析期間通期（2003 年 10 月 31 日以降、2010 年 5 月 31 日まで）における λ の統計量を示したものであり、中段、下段に関しては、各々、その分析期間を前半（2003 年 10 月 31 日以降、2006 年 12 月 29 日まで）と後半（2007 年 1 月 2 日以降、2010 年 5 月 31 日まで）に分割して、同様の統計量を示したものである。

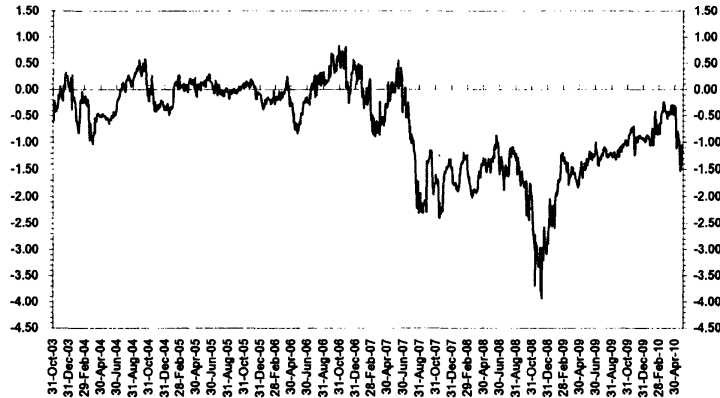


Fig.1: The Market Price of Volatility Risk λ

表中、「Sample Mean」は各期間における λ の平均水準を、また、「Sample Std. Dev.」に関しては、同期間における λ の標準偏差を表している。この平均と標準偏差のみからは、 λ が統計的に有意にゼロから乖離しているとは言えないが、各々、その隣に示してある自己相関（Auto Correlation）を見れば明らかのように、 λ の時系列は、非常に強い自己相関構造を有していることが明らかであり、自己相関の影響を取り除いた上で、 λ が統計的に有意にゼロから乖離してい

^{*9} 幾つかのケースにおいて、通貨スポット取引に関する取引コスト（ビッド-オフアースプレッド）を考慮してシミュレーションを行ったものの、取引コストを考慮しない場合と比較し、殆ど差が表れなかったため、今回の分析では通貨スポット取引に関する取引コストは考慮しないことにした。

るか否かを判断する必要がある。更に右には偏自己相関 (Partial Auto Correlation) が示しており、概ね 3 次以降の偏自己相関では、その水準がゼロ近辺に近くなるようである。よって、以下の線形回帰式、

$$\lambda_t = \alpha + \beta_1 \lambda_{t-1} + \beta_2 \lambda_{t-2} + \beta_3 \lambda_{t-3} + \epsilon_t \quad \text{但し、}\epsilon_t \text{はホワイトノイズ}$$

を想定し、その切片項 α に関する統計的有意性を検証することによって、 λ_t の無条件平均値 (Unconditional Mean)

$$E[\lambda_t] = \frac{\alpha}{1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3}$$

に関する統計的有意性を、(自己相関を取り除いた形で) 検証した。尚、このアプローチに関しては、本質的に Low and Zhang[2005] における方法と同じものである。表中、「Estimate」は上の回帰式における α の推定値を、また、「p-Value」に関しては、推定値 α の p 値を示している。分析期間通期において λ が平均的にマイナス値であることは、5 % 有意水準で有意な事実であることが確認出来ると同時に、分析期間後半では、その統計的有意性が更に強くなっていることが分かる。但し、その一方で、分析期間前半における λ の水準は、ゼロから有意に乖離している訳ではなかったことも確認出来る。ボラティリティリスクに関する市場価格 λ やボラティリティ・リスクプレミアムは、当該為替レートに関して言えば、必ずしも常に安定的に存在する訳ではなく、市場環境によって大きくその水準が変化し得るという可能性が考えられる。

Table1: Summary Statistics of the Market Price of Volatility Risk λ

Period	No. of Obs.	% of Negative λ	Sample Mean	Sample Std. Dev.	(1)Auto Correlation			(2)Partial Auto Correlation			(3)AR3 Intercept	
					Lag1	Lag2	Lag3	Lag1	Lag2	Lag3	Estimate	p-Value
Total	1,717	75.3 %	-0.686	0.831	0.989	0.983	0.976	0.989	0.171	0.037	-0.006	0.046
(A)	826	55.0 %	-0.068	0.324	0.957	0.925	0.897	0.957	0.099	0.053	-0.001	0.362
(B)	891	94.2 %	-1.260	0.742	0.979	0.965	0.951	0.979	0.169	0.033	-0.025	0.004

4.2 DHGL の要因分析

さて、前節で得られたモデルパラメータ (k, v, ρ)、及び、ボラティリティリスクに関する市場価格 λ を用いて先述の $C_t^{H,T}(0) - C_t^{H,T}(\lambda)$ ((17) 式の右辺第二項) を計算すると同時に、通貨オプションの売却ポジションに対するデルタニュートラルヘッジシミュレーションによって得られる DHGL を下に、期待 DHGL を推定し、(17) 式による期待 DHGL の要因分析を行ってみよう。

Table2 は、上記内容に基づき実施したシミュレーションによって得られた期待 DHGL を、(17) 式に従って、ボラティリティ・リスクプレミアムに起因する項 ((17) 式の右辺第二項) と、モデルの Mis-specification に起因する項 ((17) 式の右辺第一項) とに分解して表示した結果である。売却する通貨オプションの種類は、ヨーロピアンタイプの ATM 1M Straddle、及び、Delta-25 1M Put、の二種類で分析している。結果は特に、ボラティリティリスクに関する市場価格 λ の水準に応じて区分けしているのと同時に、分析期間に関しても、通期 (2003 年 10 月 31 日 ~ 2010 年 6 月 30 日、項目「Period」における「Total」で表示)、期間前半 (2003 年 10 月 31 日 ~ 2006 年 12 月 29 日、項目「Period」における「(A)」で表示)、期間後半 (2007 年 1 月 2 日 ~ 2010 年 6 月 30 日、項目「Period」における「(B)」で表示)、の 3 つに分けて結果を示している。まず、 λ に関する全サンプル (「 λ 」が「All」のケース) で評価した期待 DHGL は、ATM 1M Straddle の場合、及び、Delta-25 1M Put の場合、共に期間後半 (B) の方がプラスの収益度合いが大きくなっている。これは、期間後半 (B) における λ の絶対水準が、期間前半 (A) における同水準と比較し、相対的に大きくなっていたことに起因する。特に、通期 (「 λ 」が「All」のケースで、且つ、「Period」が「Total」のケース) を通して見れば、プラスの期待 DHGL に対しては、モデルの Mis-specification による要因よりも、ボラティリティ・リスクプレミアムの要因の方が強く影響を及ぼしていることが確認出来る。しかしその一方で、 λ が -1.5 以下となる範囲では、そのサンプルとして期間後半 (B) に集中しているのと同時に、期待 DHGL に対するモデルの Mis-specification による要因が非常に大き

くなっており、更に λ が -2 以下の範囲のみに限定すると、特に Delta-25 1M Put の場合には、(プラスの) 期待 DHGL に対する影響度は、ボラティリティリスクに関する市場価格 λ による要因よりも、寧ろ、モデルの Mis-specification による要因の方が大きくなっていることが確認出来る。

Table2: Contribution Analysis of the Delta-hedged Gain and Loss
- 1M USD-JPY OTC European Option ; From 31-Oct-03 to 30-Jun-2010 -

λ	Period	No. of Obs.	Mean of λ	(1) DHGL:ATM Straddle Short			(2) DHGL:OTM D25 Put Short		
				(1-1) Vol. Premium	(1-2) Risk Model Mis-spec.	(1-3) Total	(2-1) Vol. Premium	(2-2) Risk Model Mis-spec.	(2-3) Total
All	Total	1,717	-0.69	0.10 %	-0.04 %	0.06 %	0.04 %	0.02 %	0.06 %
	(A)	826	-0.07	0.01 %	-0.09 %	-0.08 %	0.00 %	0.04 %	0.04 %
	(B)	891	-1.26	0.18 %	0.01 %	0.19 %	0.07 %	0.01 %	0.07 %
$-4 < \lambda$ ≤ -3.5	Total	4	-3.76	0.89 %	0.73 %	1.62 %	0.33 %	0.53 %	0.86 %
	(A)	0	-	-	-	-	-	-	-
	(B)	4	-3.76	0.89 %	0.73 %	1.62 %	0.33 %	0.53 %	0.86 %
$-3.5 < \lambda$ ≤ -3	Total	18	-3.15	0.67 %	0.38 %	1.04 %	0.24 %	0.63 %	0.88 %
	(A)	0	-	-	-	-	-	-	-
	(B)	18	-3.15	0.67 %	0.38 %	1.04 %	0.24 %	0.63 %	0.88 %
$-3 < \lambda$ ≤ -2.5	Total	25	-2.78	0.59 %	0.63 %	1.22 %	0.22 %	0.57 %	0.79 %
	(A)	0	-	-	-	-	-	-	-
	(B)	25	-2.78	0.59 %	0.63 %	1.22 %	0.22 %	0.57 %	0.79 %
$-2.5 < \lambda$ ≤ -2	Total	62	-2.22	0.35 %	0.13 %	0.47 %	0.13 %	0.19 %	0.32 %
	(A)	0	-	-	-	-	-	-	-
	(B)	62	-2.22	0.35 %	0.13 %	0.47 %	0.13 %	0.19 %	0.32 %
$-2 < \lambda$ ≤ -1.5	Total	186	-1.73	0.26 %	0.08 %	0.34 %	0.10 %	-0.01 %	0.09 %
	(A)	0	-	-	-	-	-	-	-
	(B)	186	-1.73	0.26 %	0.08 %	0.34 %	0.10 %	-0.01 %	0.09 %
$-1.5 < \lambda$ ≤ -1	Total	304	-1.27	0.15 %	0.05 %	0.20 %	0.06 %	-0.03 %	0.02 %
	(A)	1	-1.04	0.12 %	0.00 %	0.13 %	0.05 %	0.21 %	0.25 %
	(B)	303	-1.27	0.15 %	0.05 %	0.20 %	0.06 %	-0.03 %	0.02 %
$-1 < \lambda$ ≤ -0.5	Total	233	-0.75	0.08 %	-0.03 %	0.05 %	0.03 %	0.01 %	0.04 %
	(A)	85	-0.66	0.07 %	-0.07 %	0.00 %	0.02 %	0.08 %	0.10 %
	(B)	148	-0.81	0.09 %	-0.01 %	0.07 %	0.03 %	-0.03 %	0.00 %
$-0.5 < \lambda$ ≤ 0	Total	461	-0.03	0.01 %	-0.26 %	-0.26 %	0.00 %	0.02 %	0.02 %
	(A)	368	0.00	0.00 %	-0.19 %	-0.19 %	0.00 %	0.07 %	0.07 %
	(B)	93	-0.18	0.02 %	-0.55 %	-0.53 %	0.01 %	-0.19 %	-0.19 %
$0 < \lambda$ ≤ 0.5	Total	388	0.17	-0.01 %	-0.05 %	-0.07 %	0.00 %	0.04 %	0.03 %
	(A)	337	0.16	-0.01 %	-0.05 %	-0.06 %	0.00 %	0.04 %	0.03 %
	(B)	51	0.20	-0.01 %	-0.08 %	-0.10 %	0.00 %	0.03 %	0.03 %
$0.5 < \lambda$ ≤ 1	Total	36	0.62	-0.04 %	-0.10 %	-0.14 %	-0.01 %	-0.01 %	-0.02 %
	(A)	35	0.62	-0.04 %	-0.11 %	-0.15 %	-0.01 %	-0.01 %	-0.03 %
	(B)	1	0.55	-0.05 %	0.32 %	0.27 %	-0.01 %	0.24 %	0.23 %

これは、ATM オプションの場合と比べて OTM オプションの場合には、その価格評価を行うにあたって、モデルの Mis-specification による価格への影響をより深刻に取り扱う必要があることを示唆しているものと思われる。また、ATM 1M Straddle の場合においても、特に λ が -2.5 以下の範囲で限定して見ると、ボラティリティリスクに関する市場価格 λ の要因と同程度（或いはそれ以上）に、モデルの Mis-specification による要因が期待 DHGL の水準に影響を及ぼしており、 λ の絶対水準が大きな状況下では、オプション価格全般に対して、モデルの Mis-specification による要因がそれなりに大きなインパクトを与えている可能性があるものと思われる。尚、この Mis-specification による要因に加え、 λ がマイナス値として大きくなっていたために、 λ が -2.5 以下の範囲では、ATM 1M Straddle の売却戦略で月率 100bp、また、Delta-25 1M Put の売却戦略で月率 80bp を超過する、非常に大きな期待 DHGL を生む結果となっている。

因みに、 $-0.5 < \lambda \leq 0$ で且つ、期間 (B) のケースでは、ATM 1M Straddle、及び、Delta-25 1M Put の場合で共に、期待 DHGL が大きくマイナスになっており、その殆どがモデルの Mis-specification による要因から生じている。これは、2010 年 4 月中旬以降に開始された運用による結果が大きく影響しており、具体的には、2010 年 5 月初旬に発生した

ギリシャ危機により生じた為替市場の大きなジャンプによって、結果的にヘッジ誤差が膨らんだことによるものである。

次に、Table2 で示した期待 DHGL の統計的有意性に関して確認しておこう。

Table3、及び、Table4 は、Table1 で検証した方法と同様の方法により、期待 DHGL の統計的有意性、及び、その内訳 (Risk Premium 要因と Mis-specification 要因) の各々に関する統計的有意性を検証した結果である。(特に、Table3 は ATM 1M Straddle オプション売却のケース、また、Table4 は Delta-25 Put オプション売却のケースで纏めている。)

Table3 における期待 DHGL 全体 (表中、「(1)DHGL:Total」で表記) の統計的有意性は、分析期間通期では $p\text{-Value}=0.222$ とそれ程、高くはないものの、特に分析期間を後半期間 (B) に限定した場合には、 $p\text{-Value}=0.072$ と、その統計的有意性に関する水準が高くなっている。これは、ボラティリティ・リスクプレミアムに起因する DHGL の統計的有意性が、同期間において非常に高まっている (表中、「DHGL implied by Volatility Risk Premium」で表記した箇所の、「Period」(B) における部分) ことが影響しているものと思われる。反対に、モデルの Mis-specification に起因する DHGL の統計的有意性 (表中、「DHGL implied by Model Mis-specification」で表記) は、分析期間通期、前半期間、後半期間、の全てにおいて、それ程高くはない結果となっている。Table2 で見たように、局面によっては、期待 DHGL に対する Mis-specification の影響は非常に高いものの、期間を通して見れば、その要因自体に不確実性が大きく存在するため、統計的に非有意な結果を齎しているものと考えることが出来る。

Table4 は、Table3 と同様の結果を Delta-25 Put オプションの売却戦略に対して纏めた結果である。Table3 のケースとは異なり、Delta-25 Put オプション売却戦略のケースでは、期待 DHGL 全体に対するモデルの Mis-specification の要因 (表中、「DHGL implied by Model Mis-specification」で表記) が相対的に高まっているようである。結果、期待 DHGL 全体に関する統計的有意性 (表中、「DHGL:Total」で表記) も、Table3 のケースよりも相対的に高くなっていることが確認出来る。期待 DHGL に対するモデルの Mis-specification に関する要因は、ATM Straddle オプションに対してよりも、Delta-25 Put オプションに対しての方が相対的に大きくなっている可能性が考えられる。

5 結論とまとめ

この論文では、実際の過去データを用いて通貨オプション市場におけるボラティリティ・リスクプレミアムの推定を時系列的に行うと同時に、デルタニュートラルヘッジされた通貨オプションポートフォリオから生じる損益水準と上記ボラティリティ・リスクプレミアムとの間に成立する一般的な関係式を導出し、デルタヘッジされた通貨オプションポートフォリオが齎す損益 (Delta-hedged Gain and Loss) の源泉を考察した。データとしては 2003 年 10 月以降の米ドル・円レート、及び、同為替レートを原通貨とするヨーロッパオプションの価格データを用いており、また、為替レートの変動が従うモデル構造としては、Heston[1993] 型の確率ボラティリティモデルを仮定している。

我々の実証分析における主要な結果は主に以下に述べる 3 点である。即ち、(1) 当該通貨オプション市場におけるボラティリティ・リスクプレミアムは時系列的に一定ではなく、時間と共に大きく変動していること、(2) 当該通貨オプション市場におけるボラティリティ・リスクプレミアムは時期を通して概ね、マイナスの値を取っており、特に 2007 年夏頃から 2008 年末に掛けては過去に比べて非常に大きなマイナスのボラティリティ・リスクプレミアムとなっていたこと、(3) 当該期間の米ドルブット (円コール) オプションに関する市場価格に対して、Heston[1993] 型確率ボラティリティモデルの構造を所与として分析した場合には、オプション市場参加者が想定するモデルの Mis-specification が Delta-hedged Gain and Loss に対して大きなバイアスを齎している可能性があるという示唆が得られたこと、などが主な結果である。

今回の分析結果を踏まえ、当問題意識に対する今後の課題に関しては幾つか存在する。まず一点目は、ジャンプ・リスクプレミアムの存在まで仮定した上で、同様の分析を進めることである。今回の分析では先述の通り、為替レートの変動過程として、Heston[1993] 型の確率ボラティリティ構造を前提としているため、ジャンプのような事象を取り扱うことは出来ない。仮に市場価格変動に関してジャンプ事象の存在を認める場合、その (ヘッジ不可能な) リスクに対する Compensation として、ジャンプ・リスクプレミアムの存在の有無、及び、そのリスクプレミアムが期待 DHGL に与え

る影響の大きさに関して更に分析していく必要があろう。また、今回の分析では、期待 DHGL の推定にあたってデルタヘッジシミュレーションを行っているが、そのシミュレーションは、1 日毎のデルタポジション調整を、Black-Scholes 型通貨オプション価格評価モデル（Garman-Kohlhagen モデル）に従って実施している。課題の二点目としては、このような離散化や、真のモデルとは異なるモデルに基づくデルタ値推定によって、期待 DHGL に対してどのような影響を及ぼしているのかを、実証的に研究することが考えられるであろう。同様の問題意識として、理論面では Branger and Schlag[2008] など幾つかの先行研究が成されているが、実証的な観点から、様々な金融オプションに対して上記課題に対する見解を与えていくことは、金融経済学的立場から非常に重要な試みであると思われる。

以上

Table3: Summary Statistics of the Delta-hedged Gain and Loss

～ The Case of ATM 1M Straddle Short Strategy ～

Period	No. of Obs.	% of Positive Ret.	Sample Mean	Sample Std. Dev.	(1)Auto Correlation			(2)Partial Auto Correlation			(3)AR3 Intercept	
					Lag1	Lag2	Lag3	Lag1	Lag2	Lag3	Estimate	p-Value
(1)DHGL : Total												
Total	1,717	55.3 %	0.06 %	0.81 %	0.875	0.779	0.698	0.875	0.059	0.023	7.2E-5	0.222
(A)	826	47.5 %	-.08 %	0.52 %	0.861	0.775	0.704	0.861	0.133	0.044	-1E-4	0.862
(B)	891	62.6 %	0.19 %	0.98 %	0.874	0.772	0.686	0.874	0.036	0.017	2.4E-4	0.072
(2)DHGL implied by the Volatility Risk Premium												
Total	1,717	75.3 %	0.10 %	0.14 %	0.986	0.979	0.971	0.986	0.211	0.046	1.0E-5	0.055
(A)	826	55.0 %	0.01 %	0.03 %	0.951	0.920	0.894	0.951	0.154	0.082	2.0E-6	0.268
(B)	891	94.2 %	0.18 %	0.16 %	0.979	0.966	0.954	0.979	0.202	0.042	3.1E-5	0.021
(3)DHGL implied by the Model Mis-specification												
Total	1,717	50.2 %	-.04 %	0.76 %	0.863	0.761	0.675	0.863	0.062	0.020	-4E-5	0.678
(A)	826	47.0 %	-.09 %	0.52 %	0.862	0.779	0.709	0.862	0.137	0.045	-1E-4	0.876
(B)	891	53.2 %	0.01 %	0.92 %	0.863	0.754	0.662	0.863	0.039	0.015	2.7E-5	0.432

Table4: Summary Statistics of the Delta-hedged Gain and Loss

～ The Case of Delta-25 1M Put Short Strategy ～

Period	No. of Obs.	% of Positive Ret.	Sample Mean	Sample Std. Dev.	(1)Auto Correlation			(2)Partial Auto Correlation			(3)AR3 Intercept	
					Lag1	Lag2	Lag3	Lag1	Lag2	Lag3	Estimate	p-Value
(1)DHGL : Total												
Total	1,717	65.8 %	0.06 %	0.40 %	0.904	0.825	0.757	0.904	0.042	0.024	5.3E-5	0.101
(A)	826	63.3 %	0.04 %	0.21 %	0.862	0.776	0.707	0.862	0.127	0.053	4.6E-5	0.112
(B)	891	68.0 %	0.07 %	0.52 %	0.911	0.833	0.765	0.911	0.019	0.019	6.6E-5	0.179
(2)DHGL implied by the Volatility Risk Premium												
Total	1,717	75.3 %	0.04 %	0.05 %	0.984	0.976	0.969	0.984	0.235	0.084	4.0E-6	0.052
(A)	826	55.0 %	0.00 %	0.01 %	0.915	0.874	0.847	0.915	0.221	0.143	1.0E-6	0.254
(B)	891	94.2 %	0.07 %	0.06 %	0.976	0.964	0.952	0.976	0.219	0.070	1.2E-5	0.020
(3)DHGL implied by the Model Mis-specification												
Total	1,717	63.2 %	0.02 %	0.39 %	0.900	0.818	0.746	0.900	0.039	0.022	2.2E-5	0.294
(A)	826	63.2 %	0.04 %	0.21 %	0.863	0.778	0.709	0.863	0.126	0.054	4.3E-5	0.128
(B)	891	63.2 %	0.01 %	0.49 %	0.906	0.824	0.752	0.906	0.016	0.017	0.9E-5	0.447

参考文献

- [1] Ait-Sahalia, Y.(2001), " Closed-form likelihood expansions for multivariate diffusions" . *Working Paper*, Princeton University.
- [2] Ait-Sahalia, Y. and Kimmel, R.(2007), " Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models" . *Journal of*

Financial Economics 83, 413-452.

- [3] Ait-Sahalia, Y. and Lo, A.(1998), " Nonparametric estimation of state-price-densities implicit in financial asset prices" . *The Journal of Finance* Vol.53, No.2, 499-547.
- [4] Ait-Sahalia, Y., Wang, W. and Yared, F.(2001), " Do option markets correctly price the probabilities of movement of the underlying asset?" . *Journal of Econometrics*, 102, 67-110.
- [5] Bakshi, G., Cao, C. and Chen, Z.(1997), " Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models" . *The Journal of Finance*, Vol.52, No.5, 2003-2049.
- [6] Bakshi, G., and Kapadia, N.(2003), " Delta-hedged gains and Negative Market Volatility Risk Premium" . *The Review of Financial Studies*, Vol.16, No.2, 527-566.
- [7] Bates, D.(1996), " Jumps and Stochastic Volatility:Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options" . *The Review of Financial Studies*, Vol.9, No.1, 69-107.
- [8] Bollen, N. and Whaley, R.(2004), " Does Net Buying Pressure Affect the Shape of Implied Volatility Functions?" . *The Journal of Finance* Vol.LIX, No.2, 711-753.
- [9] Bollerslev, T. Gibson, M. and Zhou, H.(2010), " Dynamic estimation of volatility risk premia and investor risk aversion from option-implied and realized volatilities" . *Journal of Econometrics*, .
- [10] Branger, N. and Schlag, C.(2008), " Can Tests Based on Option Hedging Errors Correctly Identify Volatility Risk Premia?" . *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.43, 1055-1090.
- [11] Broadie, M., Chernov, M. and Johannes, M.(2007), " Model Specification and Risk Premia:Evidence from Futures Options" . *The Journal of Finance* Vol.LXII, No.3, 1453-1490.
- [12] Broadie, M., Chernov, M. and Johannes, M.(2009), " Understanding Index Option Returns" . *The Review of Financial Studies*, Vol.22, No.11, 4493-4529.
- [13] Brunner, B. and Hafner, R.(2003), " Arbitrage-Free Estimation of the Risk-Neutral Density from the Implied Volatility Smile" . *Journal of Computational Finance*, Vol.7, No.1, 75-106.
- [14] Carr, P. and Wu, L.(2009), " Variance Risk Premiums" . *The Review of Financial Studies*, Vol.22, No.3, 1311-1341.
- [15] Das, S., R. and Sundaram, R., K.(1997), " Taming the Skew: Higher-Order Moments in Modeling Asset Price Processes in Finance " . NBER working paper, No.W5976, 1997.
- [16] Gârleanu, N., Pedersen, L. and Poteshman, A.(2009), " Demand-Based Option Pricing" . *The Review of Financial Studies*, 22(10), 4259-4299.
- [17] Garman, Mark, and Kohlhagen,S.(1983), "Foreign currency option values" . *Journal of International Money and Finance* Vol.2, No.3, 231-237.
- [18] Guo, D.(1998), "The risk premium of volatility implicit in currency options". *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol.16, No.4, 498-507.
- [19] Guo, D.(2000), "Dynamic Volatility Trading Strategies in the Currency Option Market". *Review of Derivatives Research*, 4, 133-154.
- [20] Heston, S.(1993), " A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options" . *The Review of Financial Studies* Vol.6, No.2, 327-343.
- [21] Jackwerth, J. C.(2000), " Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns" . *The Review of Financial Studies*, Vol.13, No.2, 433-451.
- [22] Jiang, G., J. and Tian, Y., S.(2005), " The Model-Free Implied Volatility and Its Information Content" . *The Review of Financial Studies*, Vol.18, No.4, 1305-1342.
- [23] Lin, B.H. and Chen, Y.J.(2009), " Negative Market Volatility Risk Premium:Evidence from the LIFEE Equity Index Options" . *Asia-Pacific Journal of Financial Studies*, Vol.38, No.5, 773-800.
- [24] Low, B.S. and Zhang, S.(2005), " The Volatility Risk Premium Embedded in Currency Options" . *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.40, 803-832.
- [25] Pan, J.(2002), " The Jump-risk premia implicit in options:evidence from an integrated time-series study" . *Journal of Financial Economics*, Vol.63, No.1, 3-50.
- [26] Stein, J.C.(1989), " Overreactions in the options Market" . *The Journal of Finance*, Vol.XLIV, No.4, 1011-1023.